Examen parcial 1 - MA1116

1. (8 ptos) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar el valor de la constante β para que

$$\beta A\boldsymbol{x} - D = B\boldsymbol{x} + \beta C$$

(a) Tenga solución única.

(b) No tenga solución.

(c) Tenga infinitas soluciones.

Solución : Tenemos que

$$\beta \ A\boldsymbol{x} - D = B\boldsymbol{x} + \beta C \quad \Longrightarrow \quad \beta A\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{x} = D + \beta C \quad \Longrightarrow \quad \big(\beta A - B\big)\boldsymbol{x} = D + \beta C,$$

donde

$$\beta A - B = \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 2\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta+1 \\ \beta & \beta & \beta-1 \\ \beta+1 & \beta & 2\beta+3 \end{pmatrix},$$

así,

$$\beta A - B = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta+1 \\ \beta & \beta & \beta-1 \\ \beta+1 & \beta & 2\beta+3 \end{pmatrix},$$

por otra parte

$$D + \beta C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta+1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

así,

$$D + \beta C = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta + 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta+1 \\ \beta & \beta & \beta-1 \\ \beta+1 & \beta & 2\beta+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta+1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es la matriz incógnita.

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $\left[\beta A - B \,|\, D + \beta C\right]$, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & \beta & \beta+1 & \beta \\ \beta & \beta & \beta-1 & 2\beta+1 \\ \beta+1 & a & 2\beta+3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2 \longrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & \beta & \beta+1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \\ \beta+1 & \beta & 2\beta+3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_3 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & \beta & \beta+1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \\ 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \\ \beta & \beta & \beta+1 & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\beta F_1+F_3 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \\ 0 & \beta & -\beta^2-\beta+1 & \beta^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & \beta & -\beta^2-\beta+1 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos

- Si $\beta = 0$, entonces la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

de la fila 3 se tiene que

$$0\ x_1 + 0\ x_2 + 2\ x_3 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = \frac{1}{2},$$

pero de la fila 3, se obtiene

$$0\ x_1 + 0\ x_2 + 1\ x_3 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = 0,$$

lo cual es una contradicción. Así, podemos concluir que el sistema es inconsistente si $\beta = 0$.

- Si $\beta \neq 0$, entonces la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & \beta & -\beta^2-\beta+1 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \end{array}\right),$$

de aquí,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & \beta & -\beta^2-\beta+1 & \beta^2 \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{\beta} F_2 \longrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & 1 & \dfrac{-\beta^2-\beta+1}{\beta} & \beta \\ 0 & 0 & 2 & \beta+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} F_3 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta+2 & 1-\beta \\ 0 & 1 & \dfrac{-\beta^2-\beta+1}{\beta} & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\beta+1}{2} \end{array}\right),$$

puesto que se colocaron pivotes en cada entrada de la diagonal principal, concluimos que el sistema tiene una única solución.

- No existe β que haga que el sistema tenga soluciones infinitas.

■

Otra manera de resolver este ejercicio es calculando el determinante de la matriz $\beta A - B$ el cual es igual a -2β. De aquí, si $-2\beta \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única. Cuando $-2\beta = 0$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones o es inconsistente, así, que se estudia el caso $\beta = 0$.

2. (6 ptos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -2\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular $\left| A \right|$ usando únicamente propiedades del determinante.

Solución : Aplicando operaciones elementales sobre las filas de la matriz dada

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -2\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\,|\,A\,|]{F_1 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & -3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\,|\,A\,|]{\substack{-2F_1 + F_2 \longrightarrow F_2 \\ F_3 + F_2 \longrightarrow F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 5\alpha & -2 & -\alpha \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & -3 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\,(-1)\,|\,A\,|]{F_2 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 5\alpha & -2 & -\alpha \\ 0 & -3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\,(-1)\,|\,A\,|]{\substack{5\alpha F_2 + F_3 \longrightarrow F_3 \\ -3F_2 + F_4 \longrightarrow F_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 10\alpha^2 - 2 & 9\alpha \\ 0 & 0 & -5\alpha & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\,(-1)\,(-1)\,|\,A\,|]{F_3 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & -5\alpha & -5 \\ 0 & 0 & 10\alpha^2 - 2 & 9\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\,(-1)\,(-1)\,|\,A\,|]{2\alpha F_3 + F_4 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & -5\alpha & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\,(-1)\,(-1)\,(-1)\,|\,A\,|]{F_3 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -\alpha \\ 0 & 0 & -5\alpha & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -\alpha \\ 0 & 0 & -5\alpha & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(-1)(-1)(-1)\left|A\right|]{-\frac{1}{2}F_3 \longrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -5\alpha & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(-1)(-1)(-1)\left|A\right|]{5\alpha F_3 + F_4 \longrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2}\alpha^2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(-1)(-1)(-1)\left|A\right| = (1)(-1)(1)\left(\frac{5}{2}\alpha^2 - 5\right),$$

de aquí,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^4\left|A\right| = -\left(\frac{5}{2}\alpha^2 - 5\right) \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\left|A\right| = -\left(\frac{5}{2}\alpha^2 - 5\right),$$

así,

$$\left|A\right| = -\left(\frac{5}{2}\alpha^2 - 5\right)(-2) \qquad \Longrightarrow \qquad \left|A\right| = 5\alpha^2 - 10.$$

Luego

$$\left|A\right| = 5\alpha^2 - 10.$$

■

(b) Hallar el valor o los valores de α para los cuales la matriz A es no singular.

Solución : Deseamos encontrar el valor o los valores de α para los cuales el determinante de la matriz A sea diferente de cero, entonces

$$\left|A\right| \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 5\alpha^2 - 10 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 5\alpha^2 \neq 10 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 \neq 2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \neq \pm\sqrt{2}.$$

Luego

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}.$$

■

3. (8 ptos) Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} e^t & \cos t & \operatorname{sen} t \\ e^t & -\operatorname{sen} t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución : Buscamos $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, tal que se cumpla el sistema de ecuaciones.

Es conocido que si A es una matriz invertible, entonces

$$A\boldsymbol{x} = B \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = A^{-1}B.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} e^t & \cos t & \operatorname{sen} t \\ e^t & -\operatorname{sen} t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix},$$

entonces

$$\left| A \right| = \begin{vmatrix} e^t & \cos t & \operatorname{sen} t \\ e^t & -\operatorname{sen} t & \cos t \\ e^t & -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = e^t A_{11} + \cos t A_{12} + \operatorname{sen} t A_{13},$$

donde A_{1j}, con $j = 1, 2, 3$, corresponde al cofactor $1j$ de la matriz A.

Así,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \left| M_{11} \right| = (-1)^2 \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 t - \left(-\cos^2 t\right) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1,$$

mientras que

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \left| M_{12} \right| = (-1)^3 \begin{vmatrix} e^t & \cos t \\ e^t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -\left(-e^t \operatorname{sen} t - e^t \cos t\right) = \left(\operatorname{sen} t + \cos t\right) e^t,$$

por último

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \left| M_{13} \right| = (-1)^4 \begin{vmatrix} e^t & -\operatorname{sen} t \\ e^t & -\cos t \end{vmatrix} = -e^t \cos t - \left(-\operatorname{sen} t\right) e^t = \left(\operatorname{sen} t - \cos t\right) e^t.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|A\right| &= e^t\big(1\big) + \big(\operatorname{sen} t + \cos t\big)e^t \cos t + \big(\operatorname{sen} t - \cos t\big)e^t \ \ \operatorname{sen} t\\ &= e^t + e^t \operatorname{sen} t \cos t + e^t \cos^2 t + e^t \operatorname{sen}^2 t - e^t \operatorname{sen} t \cos t\\ &= e^t + e^t\big(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\big) = 2e^t,\end{aligned}$$

por lo que

$$\left|A\right| = 2e^t \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, la matriz A es invertible y la solución del sistema de ecuaciones dado viene dada por

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}B.$$

Calculamos A^{-1}, para ello, encontramos la adjunta de la matriz A. Los otros cofactores son

$$A_{21} = \big(-1\big)^{2+1}\left|M_{21}\right| = \big(-1\big)^3 \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -\big(-\operatorname{sen} t \ \ \cos t - (-\operatorname{sen} t \cos t)\big)$$

$$= -\big(-\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t\big) = 0$$

$$A_{22} = \big(-1\big)^{2+2}\left|M_{22}\right| = \big(-1\big)^4 \begin{vmatrix} e^t & \operatorname{sen} t \\ e^t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -e^t \operatorname{sen} t - e^t \operatorname{sen} t = -2e^t \operatorname{sen} t$$

$$A_{23} = \big(-1\big)^{2+3}\left|M_{23}\right| = \big(-1\big)^5 \begin{vmatrix} e^t & \cos t \\ e^t & -\cos t \end{vmatrix} = -\big(-e^t \cos t - e^t \cos t\big)$$

$$= -\big(-2e^t \cos t\big) = 2e^t \cos t$$

$$A_{31} = \big(-1\big)^{3+1}\left|M_{31}\right| = \big(-1\big)^4 \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t - \big(-\operatorname{sen}^2 t\big) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$A_{32} = \big(-1\big)^{3+2}\left|M_{32}\right| = \big(-1\big)^5 \begin{vmatrix} e^t & \operatorname{sen} t \\ e^t & \cos t \end{vmatrix} = -\big(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t\big) = \big(\operatorname{sen} t - \cos t\big)e^t$$

$$A_{33} = \big(-1\big)^{3+3}\left|M_{33}\right| = \big(-1\big)^6 \begin{vmatrix} e^t & \cos t \\ e^t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -e^t \operatorname{sen} t - e^t \cos t = -\big(\operatorname{sen} t + \cos t\big)e^t,$$

así, la matriz de cofactores viene dada por

$$\operatorname{Cof}\left(A\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \left(\operatorname{sen}t+\cos t\right)e^t & \left(\operatorname{sen}t-\cos t\right)e^t\\ 0 & -2e^t\operatorname{sen}t & 2e^t\cos t\\ 1 & \left(\operatorname{sen}t-\cos t\right)e^t & -\left(\operatorname{sen}t+\cos t\right)e^t\end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\operatorname{Adj}\left(A\right)=\left(\operatorname{Cof}\left(A\right)\right)^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ \left(\operatorname{sen}t+\cos t\right)e^t & -2e^t\operatorname{sen}t & \left(\operatorname{sen}t-\cos t\right)e^t\\ \left(\operatorname{sen}t-\cos t\right)e^t & 2e^t\cos t & -\left(\cos t+\operatorname{sen}t\right)e^t\end{pmatrix},$$

por lo que, la inversa de la matriz es

$$A^{-1}=\frac{1}{\left|M_{31}\right|}\operatorname{Adj}\left(A\right)=\frac{1}{2e^t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ \left(\operatorname{sen}t+\cos t\right)e^t & -2e^t\operatorname{sen}t & \left(\operatorname{sen}t-\cos t\right)e^t\\ \left(\operatorname{sen}t-\cos t\right)e^t & 2e^t\cos t & -\left(\cos t+\operatorname{sen}t\right)e^t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e^t} & 0 & \dfrac{1}{2e^t}\\ \dfrac{\cos t+\operatorname{sen}t}{2} & -\operatorname{sen}t & \dfrac{\operatorname{sen}t-\cos t}{2}\\ \dfrac{\operatorname{sen}t-\cos t}{2} & \cos t & -\dfrac{\cos t+\operatorname{sen}t}{2}\end{pmatrix}.$$

Entonces la solución del sistema es

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e^t} & 0 & \dfrac{1}{2e^t}\\ \dfrac{\cos t+\operatorname{sen}t}{2} & -\operatorname{sen}t & \dfrac{\operatorname{sen}t-\cos t}{2}\\ \dfrac{\operatorname{sen}t-\cos t}{2} & \cos t & -\dfrac{\cos t+\operatorname{sen}t}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e^t} & 0 & \dfrac{3}{2e^t}\\ \dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}t & -\operatorname{sen}t & \dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}t\\ -\dfrac{3}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}t & \cos t & -\dfrac{3}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}t\end{pmatrix}.$$

Farith Briceño N. f.bricenousb@gmail.com

Luego, la solución del sistema de ecuaciones dado es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e^t} & 0 & \dfrac{3}{2e^t} \\ \dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t & -\,\mathrm{sen}\, t & \dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t \\ -\dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, t & \cos t & -\dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

■

4. (3 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones

(a) Sean $A, B \in M_{n\times n}$, tales que $AA^t = B$, entonces $\left| B \right| \geq 0$.

Solución : Tenemos que

$$\left| B \right| = \left| AA^t \right| = \left| A \right| \left| A^t \right| = \left| A \right| \left| A \right| = \left| A \right|^2 \geq 0.$$

Por lo que, la proposición es **VERDADERA**. ■

(b) Sea $A \in M_{n\times n}$ una matriz invertible, entonces todos los menores de A son invertibles.

Solución : Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual

$$\left| A \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)A_{11} + (0)A_{12} + (0)A_{13} = A_{11} = (-1)^{1+1}\left| M_{11} \right|$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (1)(1) = -1 \neq 0,$$

es decir, A es invertible.

Consideremos el menor M_{12}

$$\left| M_{12} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (1)(0) = 0,$$

es decir, el menor M_{12} **NO** es invertible.

La proposición es **FALSA**. ■

(c) Sean $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, entonces $3\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} - 5\boldsymbol{x_3}$ es solución del sistema homogéneo asociado.

Solución : Puesto que, $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, se cumple que

$$A\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{b}, \quad A\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad A\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{b}.$$

Por otra parte, el sistema homogéneo asociado viene dado por

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Así,

$$A\Big(3\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} - 5\boldsymbol{x_3}\Big) = A\big(3\boldsymbol{x_1}\big) + A\big(\boldsymbol{x_2}\big) - A\big(5\boldsymbol{x_3}\big) = 3A\boldsymbol{x_1} + A\boldsymbol{x_2} - 5A\boldsymbol{x_3}$$

$$= 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \neq 0,$$

por lo que, concluimos que **NO** es solución del sistema homogéneo asociado.

Luego, la proposición es **FALSA**. ■